Gauss. C. F.

Beiträge zur Theorie

der

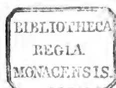
algebraischen Gleichungen

von

Carl Friedrich Gauss.

Aus dem vierten Bande der Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft
der Wissenschaften zu Göttingen.

Göttingen,
in der Dieterichschen Buchhandlung.
1849.



Es werden in dieser Denkschrift zwei verschiedene die algebraischen Gleichungen betreffende Gegenstände behandelt. Zuerst stelle ich den vor funfzig Jahren von mir gegebenen Beweis des Grundlehrsatzes der Theorie der algebraischen Gleichungen in einer veränderten Gestalt und mit erheblichen Zusätzen auf. Der zweite Theil ist einer speciellen Behandlung der algebraischen Gleichungen mit drei Gliedern gewidmet, und enthält Methoden, nicht bloss die reellen, sondern auch die imaginären Wurzeln solcher Gleichungen mit Leichtigkeit zu bestimmen.

Erste Abtheilung.

Die im Jahre 1799 erschienene Denkschrift, *Demonstratio nova theorematis, omnem functionem algebraicam rationalem integram unius variabilis in factores reales primi vel secundi gradus resolvi posse*, hatte einen doppelten Zweck, nemlich erstens, zu zeigen, dass sämmtliche bis dahin versuchte Beweise dieses wichtigsten Lehrsatzes der Theorie der algebraischen Gleichungen ungenügend und illusorisch sind, und zweitens, einen neuen vollkommen strengen Beweis zu geben. Es ist unnöthig, auf den erstern Gegenstand noch einmal zurückzukommen. Dem dort gegebenen neuen Beweise habe ich selbst später noch zwei andere folgen lassen, und ein vierter ist zuerst von Cauchy aufgestellt. Diese vier Beweise beruhen alle auf eben so vielen verschiedenen Grundlagen, aber darin kommen sie alle überein, dass durch jeden derselben

zunächst nur das Vorhandensein *Eines* Factors der betreffenden Function erwiesen wird. Der Strenge der Beweise thut diess allerdings keinen Eintrag: denn es ist klar, dass wenn von der vorgegebenen Function dieser eine Factor abgelöset wird, eine ähnliche Function von niederer Ordnung zurückbleibt, auf welche der Lehrsatz aufs neue angewandt werden kann, und dass durch Wiederholung des Verfahrens zuletzt eine vollständige Zerlegung der ursprünglichen Function in Factoren der bezeichneten Art hervorgehen wird. Indessen gewinnt ohne Zweifel jede Beweisführung eine höhere Vollendung, wenn nachgewiesen wird, dass sie geeignet ist, das Vorhandensein der sämmtlichen Factoren unmittelbar anschaulich zu machen. Dass der erste Beweis in diesem Fall ist, habe ich bereits in der gedachten Denkschrift angedeutet (Art. 23), ohne es dort weiter auszuführen: dies soll jetzt ergänzt werden, und ich benutze zugleich diese Gelegenheit, die Hauptmomente des ganzen Beweises in einer abgeänderten und, wie ich glaube, eine vergrösserte Klarheit darbietenden Gestalt zu wiederholen. Was dabei die äussere Einkleidung des Lehrsatzes selbst betrifft, so war die 1799 gebrauchte, dass die Function $x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} +$ u. s. w. sich in reelle Factoren erster oder zweiter Ordnung zerlegen lässt, damals deshalb gewählt, weil alle Einmischung imaginärer Grössen vermieden werden sollte. Gegenwärtig, wo der Begriff der complexen Grössen jedermann geläufig ist, scheint es angemessener, jene Form fahren zu lassen, und den Satz so auszusprechen, dass jene Function sich in n *einfache* Factoren zerlegen lasse, wo dann die constanten Theile dieser Factoren nicht eben reelle Grössen zu sein brauchen, sondern für dieselben auch jede complexen Werthe zulässig sein müssen. Bei dieser Einkleidung gewinnt selbst der Satz noch an Allgemeinheit, weil dann die Beschränkung auf reelle Werthe auch bei den Coëfficienten A, B u. s. w. nicht vorausgesetzt zu werden braucht, vielmehr jedwede Werthe für dieselben zulässig bleiben.

* * *

1.

Wir betrachten demnach die Function der unbestimmten Grösse x

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \text{u. s. w.} + Mx + N = X$$

wo $A, B \ldots . M, N$ bestimmte reelle oder imaginäre Coëfficienten vorstellen. Aus der Elementaralgebra ist der Zusammenhang zwischen den Wurzeln der Gleichung $X=0$ und den einfachen Factoren von X bekannt. Geschieht nemlich jener Gleichung durch die Substitution $x=p$ Genüge, so ist $x-p$ ein Factor von X, und gibt es n verschiedene Arten, jener Gleichung Genüge zu leisten, nemlich durch $x=p$, $x=p'$, $x=p''$ u. s. w., so wird das Product $(x-p)\,(x-p')\,(x-p'') \ldots .$ mit X identisch sein. Unter besondern Umständen kann aber auch eine Auflösung, wie $x=p$, in X den Factor $(x-p)^2$, oder $(x-p)^3$ oder irgend eine höhere Potenz bedingen, in welchen Fällen man die Wurzel p wie zweimal, dreimal u. s. w. vorhanden betrachtet.

Verlangt man also nur den Beweis, dass die Function X gewiss *einen* einfachen Factor zulasse, so ist es zureichend, nur das Vorhandensein irgend einer Wurzel der Gleichung $X=0$ nachzuweisen. Soll aber die vollständige Zerlegbarkeit der Function in einfache Factoren auf Einmal bewiesen werden, so muss gezeigt werden, dass der Gleichung $X=0$ Genüge geleistet werden kann, entweder durch n ungleiche Werthe von x, oder durch eine zwar geringere Anzahl ungleicher Auflösungen, wovon aber ein Theil die Charactere der mehrfach geltenden gleichen Wurzeln dergestalt an sich trägt, dass die Zusammenzählung aller ungleichen und gleichen die Totalsumme $=n$ hervorbringt.

2.

Das ganze Gebiet der complexen Grössen, in welchem die der Gleichung $X=0$ genügenden Werthe von x gesucht werden sollen, ist ein Unendliches von zwei Dimensionen, indem, wenn ein solcher Werth $x=t+iu$ gesetzt wird (wo i immer die imaginäre Einheit $\sqrt{-1}$ bedeutet), für t und u alle reellen Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$ zulässig sind. Wir haben nun zuvörderst aus diesem unendlichen Gebiete ein abgegrenztes endliches auszuscheiden, ausserhalb dessen gewiss keine Wurzel der bestimmten Gleichung $X=0$ liegen kann. Diess kann auf mehr als Eine Art geschehen: unserm Zweck am meisten gemäss scheint die folgende zu sein.

Anstatt der Form $t+iu$ gebrauche man diese

$$x = r(\cos\varrho + i\sin\varrho),$$

wonach zur Umfassung des ganzen unendlichen Gebiets der complexen Grössen r durch alle positiven Werthe von 0 bis $+\infty$, und ϱ von 0 bis 360°, oder, was dasselbe ist, von einem beliebigen Anfangswerthe bis an einen um 360° grössern Endwerth ausgedehnt werden muss.

Um für r eine Grenze zu erhalten, über welche hinaus kein Werth mehr einer Wurzel der Gleichung $X=0$ entsprechen kann, setze ich zuvörderst die Coëfficienten der einzelnen Glieder von X in eine ähnliche Form, wie x, nemlich

$$A = a(\cos\alpha + i\sin\alpha)$$
$$B = b(\cos\beta + i\sin\beta)$$
$$C = c(\cos\gamma + i\sin\gamma) \text{ u. s. w.}$$

wo also a, b, c bestimmte positive Grössen bedeuten sollen, abgesehen davon, dass auch eine oder die andere darunter $=0$ sein kann. Ich betrachte sodann die Gleichung

$$r^n - \sqrt{2}.(ar^{n-1} + br^{n-2} + cr^{n-3} + \text{u. s. w.}) = 0$$

welche, wie man leicht sieht, eine positive Wurzel hat, und zwar (Harriots Lehrsatz zufolge) nur Eine solche. Es sei R diese Wurzel, wo dann von selbst klar ist, dass für jeden positiven Werth von r, der grösser ist als R, der Werth von $r^n - \sqrt{2}.(ar^{n-1} + br^{n-2} + cr^{n-3} + \text{u. s. w.})$ positiv sein, und dass dasselbe auch von der Function

$$nr^n - \sqrt{2}.((n-1)ar^{n-1} + (n-2)br^{n-2} + (n-3)cr^{n-3} + \text{u. s. w.})$$

gelten wird, da dieselbe das $n$fache der erstern Function um

$$\sqrt{2}.(ar^{n-1} + 2br^{n-2} + 3cr^{n-3} + \text{u. s. w.})$$

also um eine positive Differenz übertrifft.

3.

Ich behaupte nun, dass die Grösse R geeignet ist, eine solche Grenze für die Werthe von r, wie im vorhergehenden Artikel gefordert ist, abzugeben. Der Beweis dieses Satzes ist auf folgende Art zu führen.

Ich setze allgemein $X = T + iU$, wo selbstredend T und U reelle Grössen bedeuten, und zwar wird

$$T = r^n\cos n\varrho + ar^{n-1}\cos((n-1)\varrho + \alpha) + br^{n-2}\cos((n-2)\varrho + \beta)$$
$$+ cr^{n-3}\cos((n-3)\varrho + \gamma) + \text{u. s. w.}$$

$$U = r^n \sin n\varrho + ar^{n-1} \sin((n-1)\varrho + \alpha) + br^{n-2} \sin((n-2)\varrho + \beta)$$
$$+ cr^{n-3} \sin((n-3)\varrho + \gamma) + \text{u. s. w.}.$$

Man übersieht leicht, dass wenn für r irgend ein positiver Werth grösser als R gewählt wird, T nothwendig dasselbe Zeichen haben wird wie $\cos n\varrho$, so oft dieser Cosinus absolut genommen nicht kleiner ist als $\sqrt{\frac{1}{2}}$. Man braucht nemlich nur T in folgende Form zu setzen

$$\begin{aligned} \pm T = \sqrt{\tfrac{1}{2}} \,.\, r^n - ar^{n-1} - br^{n-2} - cr^{n-3} - \text{u. s. w.} \\ + (\pm \cos n\varrho - \sqrt{\tfrac{1}{2}})\, r^n \\ + (1 \pm \cos((n-1)\varrho + \alpha))\, ar^{n-1} \\ + (1 \pm \cos((n-2)\varrho + \beta))\, br^{n-2} \\ + (1 \pm \cos((n-3)\varrho + \gamma))\, cr^{n-3} \\ + \text{u. s. w.} \end{aligned}$$

wo die obern Zeichen für den Fall eines positiven, die untern für den Fall eines negativen $\cos n\varrho$ gelten sollen, und wo der erste Theil des Ausdrucks auf der rechten Seite positiv ist, in Folge des im vorhergehenden Artikel gegebenen Satzes, von den folgenden aber wenigstens keiner negativ werden kann. Auf ganz ähnliche Weise erhellet (indem man in obiger Formel nur U anstatt T und durchgehends Sinus anstatt Cosinus schreibt), dass unter gleicher Voraussetzung in Beziehung auf r, allemal U dasselbe Zeichen hat wie $\sin n\varrho$, so oft dieser Sinus absolut genommen nicht kleiner ist als $\sqrt{\frac{1}{2}}$. Es hat demnach in allen Fällen wenigstens die eine der beiden Grössen T, U ein voraus bestimmtes positives oder negatives Zeichen, und es kann folglich für keinen Werth von ϱ die Function $X = 0$ werden. *W. Z. B. W.*

4.

Um das Verhalten von T und U in Beziehung auf die Zeichen und deren Wechsel (bei einem bestimmten, R überschreitenden, Werthe von r) noch mehr ins Licht zu setzen, lasse man ϱ alle Werthe zwischen zwei um 360° verschiedenen Grenzen durchlaufen, wozu jedoch nicht 0 und 360°, sondern, indem zur Abkürzung

$$\frac{45^0}{n} = \omega$$

gesetzt wird, $-\omega$ und $(8n-1)\omega$ gewählt werden sollen. Den ganzen

Zwischenraum theile ich in $4n$ gleiche Theile, so dass der erste sich von $-\omega$ bis ω, der zweite von ω bis 3ω, der dritte von 3ω bis 5ω u. s. w. erstreckt. Zuvörderst hat man auch noch die Werthe der Differentialquotienten $\frac{dT}{d\varrho}$, $\frac{dU}{d\varrho}$ in Betracht zu ziehen, wofür man hat

$$\frac{dT}{d\varrho} = -nr^n \sin n\varrho - (n-1)\, ar^{n-1} \sin((n-1)\varrho + \alpha) - (n-2)\, br^{n-2} \sin((n-2)\varrho + \beta)$$
$$- (n-3)\, cr^{n-3} \sin((n-3)\varrho + \gamma) - \text{u. s. w.}$$
$$\frac{dU}{d\varrho} = nr^n \cos n\varrho + (n-1)\, ar^{n-1} \cos((n-1)\varrho + \alpha) + (n-2)\, br^{n-2} \cos((n-2)\varrho + \beta)$$
$$+ (n-3)\, cr^{n-3} \cos((n-3)\varrho + \gamma) + \text{u. s. w.}$$

Man erkennt daraus leicht, durch ähnliche Schlüsse wie im vorhergehenden Artikel und unter Zuziehung des Satzes am Schlusse von Art. 2, dass $\frac{dT}{d\varrho}$ immer das entgegengesetzte Zeichen von $\sin n\varrho$ hat, so oft dieser Sinus absolut genommen nicht kleiner ist als $\sqrt{\frac{1}{2}}$, dass hingegen $\frac{dU}{d\varrho}$ immer dasselbe Zeichen wie $\cos n\varrho$ hat, so oft der absolute Werth dieses Cosinus nicht kleiner ist als $\sqrt{\frac{1}{2}}$. Hieraus zieht man folgende Schlüsse.

In dem ersten Intervalle, d. i. von $\varrho = -\omega$ bis $\varrho = +\omega$, ist T stets positiv, U hingegen für den Anfangswerth negativ, für den Endwerth positiv, mithin dazwischen gewiss einmal $= 0$, und zwar *nur* einmal, weil in dem ganzen Intervalle $\frac{dU}{d\varrho}$ positiv ist.

In dem zweiten Intervalle ist U stets positiv, T zu Anfang positiv, am Ende negativ, dazwischen einmal $T = 0$ und zwar nur einmal, weil in dem ganzen Intervalle $\frac{dT}{d\varrho}$ negativ ist.

In dem dritten Intervalle ist T stets negativ, U einem Zeichenwechsel unterworfen, so dass *einmal* $U = 0$ wird.

Im vierten Intervalle ist U stets negativ, T *einmal* $= 0$.

In den folgenden Intervallen wiederholen sich in gleicher Ordnung diese Verhältnisse, so dass das fünfte dem ersten, das sechste dem zweiten u. s. f. gleichsteht.

5.

Aus der im vorhergehenden Artikel erörterten Folgeordnung der positiven und negativen Werthe von T und U, die bei jedem über R hinausgehen-

den Werthe von r Statt findet *), lässt sich nun folgern, dass innerhalb des Gebiets der kleinern Werthe von r gewisse Kreuzungen in diesen Anordnungen vorhanden sein müssen, die das Wesen unsers zu beweisenden Lehrsatzes in sich schliessen. Ich werde die Beweisführung in einer der Geometrie der Lage entnommenen Einkleidung darstellen, weil jene dadurch die grösste Anschaulichkeit und Einfachheit gewinnt. Im Grunde gehört aber der eigentliche Inhalt der ganzen Argumentation einem höhern von Räumlichem unabhängigen Gebiete der allgemeinen abstracten Grössenlehre an, dessen Gegenstand die nach der Stetigkeit zusammenhängenden Grössencombinationen sind, einem Gebiete, welches zur Zeit noch wenig angebauet ist, und in welchem man sich auch nicht bewegen kann ohne eine von räumlichen Bildern entlehnte Sprache.

6.

Das ganze Gebiet der complexen Grössen wird vertreten durch eine unbegrenzte Ebene, in welcher jeder Punkt, dessen Coordinaten in Beziehung auf zwei einander rechtwinklig schneidende Achsen t, u sind, als der complexen Grösse $x = t + iu$ entsprechend betrachtet wird: bringt man diese complexe Grösse in die Form $x = r\,(\cos\varrho + i \sin\varrho)$, so bedeuten r, ϱ die Polarcoordinaten des entsprechenden Punkts. Der Inbegriff aller complexen Grössen, für welche r einerlei bestimmten Werth hat, wird demnach durch einen Kreis repräsentirt, dessen Halbmesser dieser Werth, und dessen Mittelpunkt der Anfangspunkt der Coordinaten ist. Denjenigen dieser Kreise, für welchen r um eine nach Belieben gewählte Differenz grösser als R ist, will ich mit K bezeichnen, und mit (1), (2), (3) .... ($2n$) diejenigen Punkte auf demselben, welchen die beziehungsweise zwischen ω und 3ω, zwischen 5ω und 7ω, zwischen 9ω und 11ω u.s.f. bis zwischen $(8n-3)\,\omega$ und $(8n-1)\,\omega$

*) Es ist leicht, zu zeigen, dass auch für den Werth $r = R$ selbst eine gleiche Folgeordnung noch gültig bleibt, nur mit der Einschränkung, dass dann in ganz speciellen Fällen ein Übergangswerth von ϱ, (d. i. ein solcher, für welchen T oder $U = 0$ wird) mit einer der Grössen $-\omega$, ω, 3ω, 5ω u.s.w. zusammenfallen kann, während für alle grösseren Werthe von r jeder Übergangswerth von ϱ *zwischen* zweien dieser Grössen liegen muss. Ich halte mich jedoch dabei nicht auf, da für unsern Zweck zureicht, das Bestehen jener Folgeordnung, von irgend einem Werthe von r an, nachgewiesen zu haben.

liegenden Werthe von ϱ entsprechen, für welche nach dem 4. Artikel $T = 0$ wird. Man bemerke dabei, dass für die Punkte (1), (3), (5) u. s. w. U positiv, für die Punkte (2), (4), (6) u. s. w. hingegen negativ sein wird.

7.

Die Gesammtheit derjenigen Punkte in unserer Ebene, für welche T positiv ist, bildet zusammenhängende Flächentheile, wie schon von selbst erhellet, wenn man erwägt, dass bei einem stetigen Übergange von einem Punkte zu einem andern T sich nach der Stetigkeit ändert. Eben so bilden sämmtliche Punkte, für welche T negativ wird, zusammenhängende Flächentheile. Zwischen den Flächentheilen der ersten Art und denen der zweiten liegen Punkte, in welchen $T = 0$ wird, und nach der Natur der Function T können diese Punkte nicht auch Flächenstücke, sondern nur Linien bilden, welche einerseits die einen, andererseits die andern Flächentheile begrenzen.

Der ausserhalb K liegende Raum enthält n Flächen der ersten Art, die mit eben so vielen der zweiten Art abwechseln, und wovon jede, von einem Stück der Kreislinie K an, zusammenhängend sich ins Unendliche erstreckt. Zugleich aber ist klar, dass jedes dieser Flächenstücke sich über die Kreislinie hinaus in den innern Raum fortsetzt, und dass in Beziehung auf die weitere Gestaltung folgende Fälle Statt finden können.

1) Das betreffende von einem Theile von K anfangende Flächenstück endigt sich isolirt innerhalb der Kreisfläche; seine peripherische Begrenzung besteht dann nur aus zwei zusammenhängenden Stücken, wovon eines ein Bestandtheil von K ist, das andere innerhalb des Kreisraumes liegt. In der beigefügten Figur, welche sich auf eine Gleichung fünften Grades bezieht und wo die Zeichen von T in den verschiedenen Flächentheilen eingeschrieben sind, finden sich drei der Flächen mit positivem T in diesem Falle; die eine hat die Grenzlinien 10.1 und 1.11.10; die zweite diese 4.5 und 5.12.4; die dritte 6.7 und 7.13.6. Flächentheile ähnlicher Art mit negativem T finden sich zwei vor.

2) Das Flächenstück durchsetzt einfach die Kreisfläche dergestalt, dass es mit einem an einer andern Stelle eintretenden Eine zusammenhängende Fläche bildet. Die ganze peripherische Begrenzungslinie wird dann aus vier

Stücken bestehen, von denen zwei der Kreislinie K angehören, und die beiden andern dem innern Raume. In unserer Figur findet sich dieser Fall bei dem durch 2.3; 3.0.8; 8.9; 9.11.2 begrenzten Flächenstück.

3) Das Flächenstück spaltet sich im innern Kreisraume einmahl oder mehreremahle dergestalt, dass es mit noch zweien oder mehrern an andern Stellen eintretenden eine zusammenhängende Fläche bildet, deren ganze peripherische Begrenzung dann aus sechs, acht oder mehrern Stucken in gerader Zahl bestehen wird, die abwechselnd der Kreislinie und dem innern Raume angehören. In unserer Figur tritt diess ein bei einem Flächentheile, dessen Begrenzung durch die sechs Stücke 3.4; 4.12.5; 5.6; 6.13.7; 7.8; 8.0.3 gebildet wird, in welchem aber T negativ ist.

8.

Bei einer vollständigen Aufzählung aller denkbaren Gestaltungen der in den innern Kreisraum eintretenden Flächentheile würden den angegebenen Fällen noch anderweitige Modificationen beigefügt werden müssen. Wenn z. B. ein solcher Flächentheil sich zwar in zwei Aeste spaltet, diese aber im innern Raume sich wieder vereinigen, so würde dieser Fall, jenachdem nach der Vereinigung die Fläche im Innern ihren Abschluss findet, oder (ohne neue Theilung) sich bis zu einer andern Stelle der Kreislinie fortsetzt, dem ersten oder zweiten Falle des vorhergehenden Artikels zugerechnet werden können, indem die Gestaltung der Fläche nur durch das Einschliessen einer nicht zu ihr gehörenden Insel modificirt sein würde. Übrigens würde es nicht schwer sein, strenge zu beweisen, dass bei der besondern Beschaffenheit der Function T Modificationen dieser Art *gar nicht möglich* sind: für unsern Zweck ist diess jedoch unnöthig, indem es nur auf die Folge der Stücke der *äussern* Begrenzung jedes der in Rede stehenden Flächentheile (d. i. derjenigen, in welchen T positiv ist) ankommt.

Wir haben nemlich schon bemerklich gemacht, dass die Anzahl dieser Stücke allemahl gerade ist (zwei im ersten Falle des vorhergehenden Artikels, vier im zweiten, sechs oder mehrere im dritten), wovon wechselsweise eines der Kreislinie K, eines dem innern Raume angehört. Ferner ist klar, dass wenn jene äussere Begrenzungslinie immer in Einerlei Sinn durchlaufen

wird, wozu hier derjenige gewählt werden soll, in welchem die Bezifrungen der Punkte von K wachsen (also, Beispiels halber in unserer Figur so, dass die Fläche immer rechts von der Begrenzungslinie liegt), der Anfangspunkt und der Endpunkt eines der Kreislinie angehörenden Stücks beziehungsweise durch eine gerade und die um eine Einheit grössere ungerade Zahl bezeichnet sein wird, mithin der Anfangspunkt und der Endpunkt jedes den innern Raum durchlaufenden Stücks allemahl beziehungsweise durch eine ungerade und eine gerade Zahl.

Es steht also fest, dass von den n an einem mit einer ungeraden Zahl bezeichneten Punkte von K in den innern Raum eintretenden Linien, in denen überall $T = 0$ ist, eine jede auf eine ganz bestimmte Art *) diesen Raum zusammenhängend durchläuft, bis sie an einer andern mit einer geraden Zahl bezeichneten Stelle wieder austritt. Da nun, wie schon oben (Schluss des 6 Art.) bemerkt ist, in ihrem Anfangspunkte der Werth von U positiv, am Endpunkte negativ ist, so muss wegen der Stetigkeit der Werthänderung nothwendig in einem Zwischenpunkte $U = 0$ werden. Dieser Punkt repräsentirt dann eine Wurzel der Gleichung $X = 0$; und da die Anzahl solcher Linien $= n$ ist, so ergeben sich auf diese Weise allemahl n Wurzeln jener Gleichung.

9.

Wenn die gedachten Linien durch den Kreisraum gehen ohne ein Zusammentreffen mit einander, so ist klar, dass die so erhaltenen n Wurzeln

---

*) Dass sie allemahl einen ganz bestimmten Lauf hat, beruhet darauf, dass sie einen Theil der äussern Abgrenzung einer Fläche, für welche T ein bestimmtes Zeichen hat, ausmachen soll: ich habe das positive Zeichen gewählt, was an sich ganz willkürlich ist. So verstanden setzt sich z. B. die in 1 eintretende Linie durch 11 nach 10 fort: als Theil der Grenzlinie einer Fläche, worin T negativ ist, würde die Linie 1.11 nach 2 fortgesetzt werden müssen. Spricht man hingegen nur von einer Linie worin $T = 0$ ist, ohne sie als Theil der Begrenzung einer bestimmten Fläche zu betrachten, so würde eher 11.9 als natürliche Fortsetzung von 1.11 gelten können. Der hier gewählte Gesichtspunkt unterscheidet mein gegenwärtiges Verfahren von dem von 1799, und trägt wesentlich zur Vereinfachung der Beweisführung bei.

nothwendig ungleich sind. Ein solches freies Durchgehen findet sich in unsrer Figur bei den Linien von 3 nach 8, von 5 nach 4 und von 7 nach 6, und es gehören dazu die durch die Punkte 0, 12, 13 repräsentirten Wurzeln. Wenn hingegen zwei solcher Linien, oder mehrere, einen Punkt gemeinschaftlich haben, so ist zwar darum noch nicht nothwendig, aber doch möglich, dass dieser Punkt zugleich derjenige ist, in welchem $U = 0$ wird, in welchem Falle dann zwei oder mehrere Wurzeln in Eine zusammenfallen, oder, wie es gewöhnlich ausgedrückt wird, unter sich gleich sein werden. In unsrer Figur treffen die Linien 1.10 und 9.2 in dem Punkte 11 zusammen, und in demselben wird zugleich $U = 0$; die Gleichung hat also ausser den schon aufgeführten drei ungleichen noch zwei gleiche Wurzeln.

10.

Es bleibt nur noch übrig, nachzuweisen, dass wenn der eine Wurzel $= p$ repraesentirende Punkt P in zweien oder mehrern Linien $T = 0$ zugleich liegt, das Quadrat von $x - p$ oder die der Anzahl jener concurrirenden Linien entsprechende höhere Potenz in X als Factor enthalten sein wird. Der Beweis davon beruhet auf folgenden Sätzen.

Man führe anstatt der unbestimmten Grösse x eine andere z ein, indem man $x = z + p$ setzt. Es gehe durch diese Substitution X in Z über, wo also Z eine Function von z von gleicher Ordnung wie X von x sein wird, deren constantes Glied aber fehlt. Indem man dieselbe nach aufsteigenden Potenzen von z ordnet, sei das niedrigste nicht verschwindende Glied

$$= Kz^m \text{ und } Z = Kz^m (1 + \zeta)$$

wo ζ die Form $Lz + L'zz + L''z^3 +$ u. s. w. $+ \frac{1}{K} z^{n-m}$ haben wird; endlich setze man

$$z = s (\cos \psi + i \sin \psi).$$

Der reelle und der imaginäre Bestandtheil von z drücken die Lage jedes unbestimmten Punkts der Ebene als rechtwinklige Coordinaten, und die Grössen s, ψ die Polarcoordinaten ganz eben so relativ gegen den Punkt P aus, wie die Bestandtheile von x, und die Grössen r, φ die relative Lage gegen den ursprünglichen Anfangspunkt bezeichnen. Die Verbindung eines bestimmten Werthes von s mit allen Werthen von ψ in einer Ausdehnung von 360°

stellt also die Punkte einer Kreislinie dar, die ihren Mittelpunkt in P hat und deren Halbmesser $= s$ ist.

Setzt man nun $K = k\,(\cos\varkappa + i\sin\varkappa)$, und folglich

$$Kz^m = ks^m\,(\cos(m\psi + \varkappa) + i\sin(m\psi + \varkappa))$$

so wird für ein unendlich kleines s die Grösse ζ, die wenigstens von derselben Ordnung ist wie s, neben der 1 vernachlässigt, und mithin gesetzt werden dürfen

$$T = ks^m\cos(m\psi + \varkappa)$$

woraus erhellet, dass während ψ um 360^0 wächst, das Zeichen von T in m Stücken der Kreisperipherie positiv, und in eben so vielen mit jenen abwechselnden negativ ist, oder dass T in $2m$ Punkten $= 0$ wird, nemlich für $\psi = \frac{1}{m}(\varkappa - 90^0), \frac{1}{m}(\varkappa + 90^0), \frac{1}{m}(\varkappa + 270^0)$ u. s. w. Es gehen demnach von P zusammen $2m$ Linien aus, in denen $T = 0$ ist, oder wenn man sie paarweise so verbindet, dass jede, wo, bei wachsendem ψ, das Zeichen aus $-$ in $+$ übergeht, zusammen mit der nächstfolgenden, wo der entgegengesetzte Übergang Statt findet, wie die Begrenzungslinie eines Flächentheils mit positivem T betrachtet wird, so treffen in P überhaupt m dergleichen Begrenzungslinien zusammen.

Von der andern Seite ist klar, dass so wie Z unbestimmt durch z^m und durch keine höhere Potenz von z theilbar ist, X den Factor $(x - p)^m$, aber keine höhere Potenz von $x - p$ enthalten wird. Es ist also allemahl, wenn p irgend eine Wurzel der Gleichung $X = 0$ bedeutet, der Exponent der höchsten Potenz von $x - p$, durch welche X theilbar ist, der Anzahl der *in* P zusammentreffenden Begrenzungslinien für Flächen mit positivem T gleich, oder was dasselbe ist, der Anzahl solcher *an* P zusammentreffender Flächen.

Übrigens ist es leicht, der Beweisführung eine von Einmischung unendlich kleiner Grössen ganz unabhängige Einkleidung zu geben, und zwar ganz analog der Schlussreihe in den Art. 3 und 4. Es lässt sich nemlich ein Werth von s nachweisen, für welchen, so wie für jeden kleinern, der ganze Cyklus aller Werthe von ψ dieselbe abwechselnde Folge von m Stücken mit positivem T und ebensovielen mit negativem darbietet. Diese Eigenschaft hat die positive Wurzel der Gleichung.

$$0 = m\sqrt{\tfrac{1}{2}} - (m+1)\, ls - (m+2)\, l'ss - (m+3)\, l''s^3 - \text{u.s.w.}$$

wo l, l', l'' u.s.w. die positiven Quadratwurzeln aus den Normen der complexen Grössen L, L', L'' u.s.w. bedeuten, oder wo

$$L = l\,(\cos\lambda + i \sin\lambda)$$
$$L' = l'\,(\cos\lambda' + i \sin\lambda')$$
$$L'' = l''(\cos\lambda'' + i \sin\lambda'') \text{ u.s.w.}$$

gesetzt ist. Ich glaube jedoch, die sehr leichte Entwicklung dieses Satzes hier übergehen zu können.

Schliesslich mag noch bemerkt werden, dass bei der Beweisführung in der Abhandlung von 1799 die Betrachtung *zweier* Systeme von Linien erforderlich war, das eine, die Linien wo $T = 0$, das andere diejenigen wo $U = 0$ enthaltend, während in unserm jetzigen Verfahren die Betrachtung Eines Systems ausgereicht hat; ich habe dazu das System der Begrenzungslinien der Flächentheile mit positivem T gewählt, es hätte aber eben so gut zu demselben Zweck die Betrachtung der Begrenzungslinien der Flächen mit positivem (oder negativem) U dienen können.

Zweite Abtheilung.

11.

Zur numerischen Bestimmung der Wurzeln solcher algebraischen Gleichungen, die nur aus drei Gliedern bestehen, lassen sich verschiedene Methoden anwenden, die hier einer Eleganz und Bequemlichkeit fähig werden, gegen welche die mühsamen bei Gleichungen von weniger einfacher Gestalt unvermeidlichen Operationen weit zurückstehen. Solche Methoden verdienen also wohl eine besondere Darstellung, zumahl da Gleichungen von jener Form häufig genug vorkommen.

Es gilt diess zunächst von der Entwicklung der Wurzeln in unendliche Reihen. In der That lässt sich *jede*, gleichviel ob reelle oder imaginäre Wurzel einer Gleichung mit drei Gliedern durch eine convergente Reihe von einfachem Fortschreitungsgesetz ausdrücken. Ich werde jedoch *diese* Auflösungsart aus mehrern Gründen von meiner gegenwärtigen Betrachtung ganz aus-

schliessen, und bemerke hier nur, dass der Grad der Convergenz von dem gegenseitigen Verhalten der Coëfficienten abhängig, dass sie desto langsamer ist, je näher diess Verhalten demjenigen kommt, bei welchem die Gleichung zwei gleiche Wurzeln hat, und dass in diesem Grenzfalle selbst sie schwächer ist, als bei irgendwelcher fallenden geometrischen Progression. So bemerkenswerth auch diese Reihen in allgemeiner theoretischer Rücksicht sind, so wird man doch, abgesehen von dem Falle wo ihre Convergenz eine sehr schnelle wird, in praktischer Beziehung immer den *indirecten* Methoden den Vorzug geben, welche in den nachfolgenden Artikeln entwickelt werden sollen.

12.

Zur Auffindung der *reellen* Wurzeln benutze ich meine im Jahre 1810 zuerst gedruckte Hülfstafel für Logarithmen von Summen und Differenzen, oder, wo eine grössere Genauigkeit verlangt wird, als Logarithmen mit fünf Zifern geben können, die ähnliche aber erweiterte Tafel von Matthiessen. Ich habe ein Paar specielle Anwendungen dieses Verfahrens schon früher bekannt gemacht, nemlich zur Auflösung der quadratischen Gleichungen bei der 1840 erschienenen zwanzigsten Ausgabe von Vega's logarithmischem Handbuch, und zur Auflösung der cubischen Gleichung, welche bei der parabolischen Bewegung zur Bestimmung der wahren Anomalie dient, in Nro. 474 der Astronomischen Nachrichten. An letzterm Orte ist auch bereits die allgemeine Anwendbarkeit des Verfahrens auf alle algebraischen Gleichungen mit drei Gliedern bemerklich gemacht. Obgleich nun die Ausführung dieses ganz elementarischen Gegenstandes gar keine Schwierigkeiten hat, so wird man doch, bei der ziemlich grossen Mannigfaltigkeit der Fälle, einer übersichtlichen Sonderung derselben, und der Zusammenstellung der gebrauchfertigen Vorschriften ein Paar Seiten gern eingeräumt sehen.

Anstatt jener logarithmischen Hülfstafeln kann man sich auch der gewöhnlichen logarithmisch-trigonometrischen Tafeln bedienen: allein theils sind jene im Allgemeinen für den gegenwärtigen Zweck von bequemerm Gebrauch, theils gewähren sie doppelt so grosse Genauigkeit als die letztern. Ich würde daher die Benutzung der trigonometrischen Tafeln für das in Rede stehende Geschäft auf den seltenen Fall beschränken, wo man die durch siebenzifrige

Logarithmen erreichbare Genauigkeit noch zu überschreiten wünscht und dazu die bekannten zehnzifrigen Logarithmen in Vlacq's oder Vega's Thesaurus verwenden kann. Übrigens sind, wenn man sich der Hülfslogarithmen bedient, doppelt so viele Fälle zu unterscheiden, als wenn die trigonometrischen Logarithmen gebraucht werden. Als ein Nachtheil darf diess jedoch nicht angesehen werden: denn wenn einmahl die vollständige allgemeine Classification vorliegt, ist es leicht, jedem concreten Falle sein Fach anzuweisen, und das eigentliche indirecte Geschäft ist so viel leichter auszuführen, wenn das ganze Fach nur den halben Umfang hat. Aber gerade aus jenem Grunde ist für die Auflösung durch trigonometrische Logarithmen die allgemeine Classification kürzer und bequemer darzustellen, und ich werde sie daher vorausschicken, da sodann die Classification für die andere Auflösungsform sich daraus von selbst ergibt.

13.

Die Ausführung der Methode wird, unmittelbar, nur auf Bestimmung der *positiven* Wurzeln einer vorgegebenen Gleichung gerichtet; die negativen ergeben sich, indem man dasselbe Verfahren auf diejenige Gleichung anwendet, welche aus jener durch Einführung der der ursprünglichen Unbekannten entgegengesetzten Grösse entsteht.

Die Gleichung setze ich in die Form

$$x^{m+n} \pm ex^m \pm f = 0$$

wo m, n, e, f gegebene *positive* Grössen bedeuten. Diese Form umfasst eigentlich, nach Verschiedenheit der Combination der Zeichen, vier verschiedene Fälle, wovon aber der erste, wo beidemahl die oberen Zeichen gewählt werden, ausfällt, da offenbar die Gleichung

$$x^{m+n} + ex^m + f = 0$$

keine positive Wurzel haben kann. Übrigens ist verstattet, vorauszusetzen, dass m und n (worunter ganze Zahlen verstanden werden, obwohl die Anwendbarkeit der Methode an sich davon unabhängig ist) keinen gemeinschaftlichen Divisor haben, indem auf diesen Fall jeder andere leicht zurückzuführen ist. Endlich werde ich zur Abkürzung schreiben

$$\frac{f^n}{e^{m+n}} = \lambda.$$

Erste Form.

$$x^{m+n} + e x^m - f = 0.$$

Indem man einen immer im ersten Quadranten zu nehmenden Winkel θ einführt, so dass

$$\frac{x^{m+n}}{f} = \sin\theta^2, \frac{e x^m}{f} = \cos\theta^2$$

wird, also (I)

$$x^{m+n} = f \sin\theta^2, \; x^m = \frac{f \cos\theta^2}{e}, \; x^n = e \operatorname{tang} \theta^2$$

findet sich durch Elimination von x die Gleichung

$$\lambda = \frac{\sin\theta^{2m}}{\cos\theta^{2m+2n}}$$

aus welcher θ bestimmt werden muss. Man erkennt leicht, dass der zweite Theil dieser Gleichung als Function einer unbestimmten Grösse θ betrachtet, von 0 bis ∞ wächst, während θ alle Werthe von 0 bis 90° durchläuft, und dass es also einen, und nur einen Werth von θ gibt, der jener Gleichung Genüge leistet. Nachdem derselbe gefunden ist, erhält man x aus einer der Formeln I. Man bemerke, dass $\theta = 45^0$ wird für $\lambda = 2^n$, und dass folglich θ im ersten Octanten zu suchen ist wenn λ kleiner, im zweiten wenn λ grösser ist als 2^n.

Zweite Form.

$$x^{m+n} - e x^m - f = 0.$$

Man wird hier setzen

$$f x^{-m-n} = \sin\theta^2, \; e x^{-n} = \cos\theta^2$$

oder (I)

$$x^{m+n} = \frac{f}{\sin\theta^2}, \; x^n = \frac{e}{\cos\theta^2}, \; x^m = \frac{f \operatorname{cotang} \theta^2}{e}$$

wonach also θ aus der Gleichung

$$\lambda = \frac{\sin\theta^{2n}}{\cos\theta^{2m+2n}}$$

zu bestimmen sein wird, was auf eine und nur auf eine Art geschehen kann: der Werth von x findet sich sodann durch eine der Gleichungen I. Im ersten oder zweiten Octanten liegt θ, jenachdem λ kleiner oder grösser ist als 2^m.

Dritte Form.

$$x^{m+n} - e x^m + f = 0.$$

Hier wird man setzen

$$\frac{x^n}{e} = \sin\theta^2,\ \frac{f x^{-m}}{e} = \cos\theta^2$$

oder (I)

$$x^{m+n} = f \operatorname{tang}\theta^2,\ x^m = \frac{f}{e\cos\theta^2},\ x^n = e\sin\theta^2$$

von welchen Formeln eine zur Bestimmung von x dienen wird, sobald der Werth von θ gefunden ist. Dieser ergibt sich durch Auflösung der Gleichung

$$\lambda = \cos\theta^{2n} \sin\theta^{2m}$$

Da das auf der rechten Seite stehende Glied dieser Gleichung, als Function einer unbestimmten Grösse θ betrachtet, sowohl für $\theta = 0$ als für $\theta = 90^0$ verschwindet, so muss dazwischen ein grösster Werth liegen, und da das Differential des Logarithmen dieser Function $= (2m \operatorname{cotg}\theta - 2n \operatorname{tang}\theta)\, d\theta$ ist, so findet der grösste Werth Statt für $\theta = \theta^*$, wenn man $\sqrt{\frac{m}{n}} = \operatorname{tang}\theta^*$ setzt. Es wird demnach jene Function von 0 bis zu ihrem grössten Werthe, welcher offenbar

$$= \frac{m^m n^n}{(m+n)^{m+n}}$$

ist, zunehmen, und von da bis 0 abnehmen, während θ von 0 zu θ^* und von da bis 90^0 zunimmt. Der Maximumwerth ist daher jedenfalls grösser als der Werth für $\theta = 45^0$, d. i. grösser als $\frac{1}{2^{m+n}}$, den Fall ausgenommen wo $m = n$, und also $\frac{1}{2^{m+n}}$ selbst der Maximumwerth ist.

Man schliesst hieraus, dass jenachdem λ grösser ist als

$$\frac{m^m n^n}{(m+n)^{m+n}}$$

oder kleiner, der Gleichung $\lambda = \cos\theta^{2n} \sin\theta^{2m}$ gar nicht oder durch zwei verschiedene Werthe von θ wird Genüge geleistet werden können. Im er-

stern Falle hat die Gleichung $x^{m+n} - ex^m + f = 0$ gar keine (positive) Wurzel, im andern zwei. In dem speciellen Falle, wo

$$\lambda = \frac{m^m n^n}{(m+n)^{m+n}}$$

ist, fallen beide Auflösungen zusammen, und die Gleichung hat zwei gleiche Wurzeln, wofür man nach Gefallen eine der drei Formeln benutzen kann

$$x^{m+n} = \frac{fm}{n},\ x^m = \frac{f(m+n)}{en},\ x^n = \frac{em}{m+n}$$

Was übrigens in dem Falle, wo zwei Auflösungen wirklich vorhanden sind, die Octanten betrifft, in welche die Werthe von θ fallen, so sieht man leicht, dass wenn λ grösser ist als $\frac{1}{2^{m+n}}$, beide Werthe von θ mit θ^* in demselben Octanten liegen, nemlich im ersten oder zweiten, jenachdem m kleiner oder grösser ist als n: ist hingegen λ kleiner als $\frac{1}{2^{m+n}}$, so wird der eine Werth von θ im ersten, der andere im zweiten Octanten zu suchen sein. In dem speciellen Falle, wo $\lambda = \frac{1}{2^{m+n}}$, ist 45^0 selbst der eine Werth von θ, und der andere liegt in demselben Octanten wie θ^*.

Es mag noch die aus dieser Zergliederung aller drei Formen sich leicht ergebende Folge bemerkt werden, dass unsere Gleichung (insofern wir annehmen, dass m und n keinen gemeinschaftlichen Divisor haben) nicht mehr als drei reelle Wurzeln haben kann, was auch aus andern Gründen bekannt ist.

14.

Die vorstehenden Vorschriften werden nun leicht in diejenigen umgeschmolzen, die der Anwendung der Hülfslogarithmen entsprechen, da diese, $A = \log a$, $B = \log b$, $C = \log c$, betrachtet werden können wie die Logarithmen der Quadrate der Tangenten, Cosecanten und Secanten der von 45^0 bis 90^0 zunehmenden, oder, was dasselbe ist, wie die Logarithmen der Quadrate der Cotangenten, Secanten und Cosecanten der von 45^0 bis 0 abnehmenden Winkel, also

$$a = \text{tang}\,\theta^2,\ \frac{1}{b} = \sin\,\theta^2,\ \frac{1}{c} = \cos\,\theta^2$$

für die Werthe von θ im zweiten Octanten, oder

$$\frac{1}{a} = \text{tang}\,\theta^2,\ \frac{1}{c} = \sin\,\theta^2,\ \frac{1}{b} = \cos\,\theta^2$$

für die Werthe von θ im ersten Octanten.

Die vollständigen Vorschriften vereinige ich in folgendem Schema, wo eben so wie oben

$$\lambda = \frac{f^n}{e^{m+n}}$$

gesetzt ist.

Erste Form.

$$x^{m+n} + ex^m - f = 0$$

Erster Fall. $\lambda > 2^n$

$$\lambda = a^{m+n} b^n = a^m c^n = \frac{c^{m+n}}{b^m}$$

$$x^{m+n} = \frac{f}{b},\ x^m = \frac{f}{ec},\ x^n = ea.$$

Zweiter Fall. $\lambda < 2^n$

$$\lambda = \frac{b^n}{a^m} = \frac{c^n}{a^{m+n}} = \frac{b^{m+n}}{c^m}$$

$$x^{m+n} = \frac{f}{c},\ x^m = \frac{f}{eb},\ x^n = \frac{e}{a}.$$

Zweite Form.

$$x^{m+n} - ex^m - f = 0$$

Erster Fall. $\lambda > 2^m$

$$\lambda = a^{m+n} b^m = a^n c^m = \frac{c^{m+n}}{b^n}$$

$$x^{m+n} = fb,\ x^m = \frac{f}{ea},\ x^n = ec.$$

Zweiter Fall. $\lambda < 2^m$

$$\lambda = \frac{b^m}{a^n} = \frac{c^m}{a^{m+n}} = \frac{b^{m+n}}{c^n}$$

$$x^{m+n} = fc,\ x^m = \frac{fa}{e},\ x^n = eb.$$

Dritte Form.

$$x^{m+n} - ex^m + f = 0$$

Erster Fall. $\frac{1}{\lambda} < \frac{(m+n)^{m+n}}{m^m n^n}$

Gar keine Auflösung.

Zweiter Fall. $\frac{1}{\lambda} = \frac{(m+n)^{m+n}}{m^m n^n}$

Zwei gleiche Wurzeln, zu deren Bestimmung eine der Gleichungen

$$x^{m+n} = \frac{fm}{n},\ x^m = \frac{f(m+n)}{en},\ x^n = \frac{em}{m+n}$$

dient.

Dritter Fall. $\frac{1}{\lambda}$ grösser als $\frac{(m+n)^{m+n}}{m^m n^n}$ aber nicht grösser als 2^{m+n}, und zugleich m grösser als n.

Zwei Wurzeln, für welche

$$\frac{1}{\lambda} = a^n b^{m+n} = \frac{c^{m+n}}{a^m} = b^m c^n$$

$$x^{m+n} = fa,\ x^m = \frac{fc}{e},\ x^n = \frac{e}{b}.$$

Vierter Fall. Für $\frac{1}{\lambda}$ dieselben Grenzen, wie im dritten Fall, aber m kleiner als n.

Zwei Wurzeln, für welche

$$\frac{1}{\lambda} = a^m b^{m+n} = \frac{c^{m+n}}{a^n} = b^n c^m$$

$$x^{m+n} = \frac{f}{a},\ x^m = \frac{fb}{e},\ x^n = \frac{e}{c}.$$

Fünfter Fall. $\frac{1}{\lambda}$ grösser als 2^{m+n}.

Zwei Wurzeln, wovon die eine durch die Formeln des dritten Falles, die andere durch die des vierten bestimmt wird.

Es mag noch bemerkt werden, dass im dritten Falle der Werth von a, welcher der einen Wurzel entspricht, kleiner als $\frac{m}{n}$, der zur andern Wurzel gehörende grösser als $\frac{m}{n}$ ist; im vierten Falle verhalten sich die beiden Werthe von a auf ähnliche Weise gegen $\frac{n}{m}$.

15.

Über die Anwendung dieser Vorschriften ist noch folgendes beizufügen.

Zur Bestimmung jeder Wurzel sind zwei Operationen auszuführen: zuerst, aus λ den dazu gehörenden Werth von a (und damit zugleich den von b oder c) abzuleiten; sodann, aus diesem den Werth von x zu berechnen. Für jede dieser beiden Operationen kann man unter drei Formeln wählen; ich ziehe in den meisten Fällen die zuerst angesetzten vor. Bei allen diesen Rechnungen hat man es gar nicht mit den Grössen λ, a, b, c selbst, sondern nur mit ihren Logarithmen zu thun. Die erste Operation ist eine indirecte, und beruhet demnach in der Regel auf mehrern stufenweise fortschreitenden Annäherungen, wobei es bequem gefunden werden wird, zu Anfang Tafeln mit einer geringern Anzahl von Zifern zu gebrauchen. Matthiessens Tafel hat bekanntlich sieben Decimalen; die meinige fünf; Encke und Ursin haben sie mit vier Zifern abdrucken lassen, und wenn man beim Anfange der Arbeit noch gar keine Kenntniss einer ersten groben Annäherung mitbringt, wird man es vielleicht vortheilhaft finden, einen noch kürzern Extract der Tafeln mit nur drei Zifern auf einem besondern Blättchen vor sich zu haben, etwa so:

A	B	A	B	A	B
0	0,301	1,0	0,041	2,0	0,004
0,1	0,254	1,1	0,033	2,1	0,003
0,2	0,212	1,2	0,027	2,2	0,003
0,3	0,176	1,3	0,021	2,3	0,002
0,4	0,146	1,4	0,017	2,4	0,002
0,5	0,119	1,5	0,014	2,5	0,001
0,6	0,097	1,6	0,011	2,9	0,001
0,7	0,079	1,7	0,009	3,0	0,000
0,8	0,064	1,8	0,007		
0,9	0,051	1,9	0,005		
1,0	0,041	2,0	0,004		

16.

Als Beispiel mag die Gleichung

$$x^7 + 28x^4 - 480 = 0$$

dienen, wo

$$\lambda = \frac{6750}{823543}, \ \log\frac{1}{\lambda} = 2{,}0863825$$

wird. Die Gleichung hat die erste Form, mithin *eine* positive Wurzel, und gehört, da λ kleiner ist als 8, zum zweiten Fall. Die erste Operation besteht darin, dass der Gleichung $\log\frac{1}{\lambda} = 4A - 3B$ Genüge geschehe, also, wenn man die Rechnung mit drei Decimalen anfängt, dieser

$$2{,}086 = 4A - 3B.$$

Ein flüchtiger Blick auf obige Tafel zeigt schon, dass A zwischen 0,5 und 0,6 zu suchen sei. Es wird nemlich

A	4A − 3B	Fehler
0,5	1,643	− 0,443
0,6	2,109	+ 0,023

woraus sich auf einen genauern Werth 0,595 schliessen lässt. Eine neue Rechnung nach den Tafeln mit fünf Decimalen, wo also $\log\frac{1}{\lambda} = 2{,}08638$ zu setzen ist, gibt

A	$4A - 3B$	Fehler
0,595	2,08501	— 0,00137
0,596	2,08961	+ 0,00323

woraus der noch genauere Werth 0,5953 erkannt wird. Endlich für sieben Decimalen hat man

A	$4A - 3B$	Fehler
0,5952	2,0859279	— 0,0004546
0,5953	2,0863885	+ 0,0000060

Zu dem Werthe $A = 0{,}5953$ muss also noch die Correction $-\frac{60}{4606}$ Einheiten der vierten Decimale hinzukommen, in welcher Form ich sie beibehalte, da es, wenn zur Bestimmung von x die erste Formel

$$x^7 = \frac{f}{c}$$

gebraucht werden soll, nur darauf ankommt, den entsprechenden Werth von C zu finden. Diesen erhält man, indem man zu dem neben $A = 0{,}5953$ stehenden Werthe $C = 0{,}6935705$ die Correction $-\frac{60}{4606} \times 798$ hinzufügt, letztere wie Einheiten der siebenten Decimale betrachtet, also

$$\begin{aligned} C &= 0{,}6935695 \\ \log f &= 2{,}6812412 \\ \hline 7 \log x &= 1{,}9876717 \\ \log x &= 0{,}2839531 \\ x &= 1{,}9228841 \end{aligned}$$

Zur Auffindung der negativen Wurzeln wird man $x = -y$ schreiben und die positiven Wurzeln der Gleichung

$$y^7 - 28y^4 + 480 = 0$$

aufsuchen. Diese gehört zur dritten Form, und da $\frac{1}{\lambda} = \frac{823543}{6750}$ grösser ist als $\frac{7^7}{3^3 4^4} = \frac{823543}{6912}$, aber kleiner als $2^7 = 128$, zugleich auch m grösser ist als n, so gilt der dritte Fall, oder es finden zwei Wurzeln Statt, zu deren Ausmittlung der Gleichung

$$2{,}0863825 = 3A + 7B$$

genügt werden muss. Aus der Schlussbemerkung des 14. Art. weiss man, dass der eine Werth von A kleiner, der andere grösser sein muss als $\log \frac{4}{3}$ $= 0{,}12494$. Auch ergehen sich die Grenzen der Werthe von A sofort aus der obigen Tafel mit dreizifrigen Logarithmen, nach welchen man erhält:

A	$3A + 7B$	Fehler
0,0	2,107	+ 0,021
0,1	2,078	— 0,008
0,2	2,084	— 0,002
0,3	2,132	+ 0,046

Will man zur nähern Bestimmung zuerst vierzifrige Logarithmen gebrauchen, so hat man zunächst für die erste Auflösung

A	$3A + 7B$	Fehler
0,05	2,0869	+ 0,0005
0,06	2,0847	— 0,0017

Sodann ergehen die fünfzifrigen Tafeln

0,052	2,08667	+ 0,00029
0,053	2,08638	0

Endlich die siebenzifrigen

0,0529	2,0863943	+ 0,0000118
0,0530	2,0863660	— 0,0000165

Hienach wird

$$A = 0{,}0529417$$
$$\log f = 2{,}6812412$$
$$7 \log y = 2{,}7341829$$
$$\log y = 0{,}3905976$$
$$-y = x = -\ 2{,}4580892$$

Für die zweite Auflösung steht die Rechnung, auf ähnliche Weise geführt, folgendermaassen:

A	$3A + 7B$	Fehler
0,19	2,0843	— 0,0021
0,20	2,0868	+ 0,0004
0,197	2,08627	— 0,00011
0,198	2,08654	+ 0,00016

0,1975	2,0863805	— 0,0000020
0,1976	2,0864082	+ 0,0000257

$$A = 0{,}1975072$$
$$\log f = 2{,}6812412$$
$$7 \log y = 2{,}8787484$$
$$\log y = 0{,}4112498$$
$$x = -\ 2{,}5778036$$

Die Gleichung, welche uns hier als Beispiel gedient hat, ist absichtlich so gewählt, dass zwei ihrer Wurzeln wenig verschieden sind. In einem solchen Falle sind, wie schon oben im Art. 11 bemerkt ist, die Reihen wegen ihrer sehr langsamen Convergenz wenig brauchbar: auch bei der indirecten Auflösung ist davon wenigstens eine schwache Analogie erkennbar, indem das Fortschreiten der successiven Annäherungen bei den beiden negativen Wurzeln (welche eben die wenig ungleichen sind) etwas träger ist, als bei der positiven. Ein wesentlicher Unterschied ist aber der, dass die sehr langsame Convergenz der Reihen für sämmtliche Wurzeln eintritt, während bei dem indirecten Verfahren die, auch nur in geringem Grade fühlbare, langsamere Annäherung lediglich bei den zwei wenig verschiedenen Wurzeln vorkommt.

17.

Ganz verschieden von dem in den vorhergehenden Artikeln gelehrten Verfahren ist dasjenige, welches zur Bestimmung der imaginären Wurzeln angewandt werden muss. Im Allgemeinen ist die Bestimmung der imaginären Wurzeln auf indirectem Wege deswegen weit schwieriger, als die der reellen, weil jene aus einem unendlichen Gebiet von zwei Dimensionen herausgesucht werden müssen, diese nur aus einem Unendlichen von Einer Dimension, und gerade darum verdient ein sehr umfassender besonderer Fall, wo man jene Schwierigkeit umgehen und die Frage in dasselbe Gebiet versetzen kann, zu welchem die Aufsuchung der reellen Wurzeln gehört, eine eigne Ausführung. Einen solchen Fall bieten die Gleichungen mit drei Gliedern dar.

Da die Methode mit gleicher Leichtigkeit angewandt werden kann, die Coëfficienten der Gleichung mögen reell oder imaginär sein, so lege ich sofort die allgemeine Form der Gleichung zum Grunde

$$X = x^{m+n} + e(\cos\varepsilon + i\sin\varepsilon)\,x^m + f(\cos\varphi + i\sin\varphi) = 0$$

wo e und f positive Grössen bedeuten: für einen reellen, positiven oder negativen, Coëfficienten ist dann der betreffende Winkel (ε oder φ) entweder 0 oder 180°. Die Voraussetzung, dass m und n keinen gemeinschaftlichen Divisor haben, wird ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit auch hier beibehalten bleiben können. Eine der Gleichung Genüge leistende imaginäre Wurzel $x = t + iu$ setzt man in die Form $r(\cos\varrho + i\sin\varrho)$, wobei es für unsern gegenwärtigen Zweck vortheilhafter ist, die sonst gewöhnliche Bedingung, dass r positiv sein soll, hier nicht zu machen, sondern anstatt derselben die, dass ϱ immer zwischen den Grenzen 0 und 180° genommen werden soll. In dem Fall, wo die Coëfficienten der Gleichung beide reell sind, kann man den Umfang der Werthe von ϱ noch weiter auf die Hälfte verengen: denn da bekanntlich von den imaginären Wurzeln einer solchen Gleichung je zwei zusammengehören, wie $t + iu$ und $t - iu$, so wird offenbar für die eine Wurzel jedes Paars der Werth von ϱ zwischen 0 und 90° fallen, und man braucht durch das indirecte Verfahren nur diese zu bestimmen, indem daraus die andere von selbst folgt durch Vertauschung von ϱ mit $180° - \varrho$ und von r mit $-r$.

18.

Das Wesen der Methode besteht in der Aufstellung einer Gleichung, welche bloss ϱ ohne r enthält. Um dazu zu gelangen, setze man die Gleichung $X = 0$ durch Division mit ihrem ersten Gliede in die Form

$$1 + e(\cos\varepsilon + i\sin\varepsilon)\,x^{-n} + f(\cos\varphi + i\sin\varphi)\,x^{-m-n} = 0$$

oder

$$1 + er^{-n}(\cos(n\varrho - \varepsilon) - i\sin(n\varrho - \varepsilon)) + fr^{-m-n}(\cos((m+n)\varrho - \varphi) - i\sin((m+n)\varrho - \varphi)) = 0$$

Da nun hier die imaginären Theile einander aufheben müssen, so hat man (I)

$$r^m = -\frac{f\sin((m+n)\varrho - \varphi)}{e\sin(n\varrho - \varepsilon)}$$

Auf ähnliche Art erhält man, wenn man die Gleichung $X = 0$ mit ihrem zweiten oder dritten Gliede dividirt, und erwägt, dass in beiden Fällen die imaginären Theile der neuen Gleichungen einander aufheben müssen, die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} r^{m+n} &= \frac{f\sin(m\varrho+\varepsilon-\varphi)}{\sin(n\varrho-\varepsilon)} \\ r^{m} &= -\frac{e\sin(m\varrho+\varepsilon-\varphi)}{\sin((m+n)\varrho-\varphi)} \end{aligned}\right\}\text{(I)}$$

Man sieht, dass jede der drei Gleichungen (I) auch schon aus der Verbindung der beiden andern abgeleitet werden kann. Eliminirt man aber r aus Verbindung zweier, so erhält man (II)

$$\lambda = (-1)^{m+n}\frac{\sin(m\varrho+\varepsilon-\varphi)^m\sin(n\varrho-\varepsilon)^n}{\sin((m+n)\varrho-\varphi)^{m+n}}$$

wo zur Abkürzung (eben so wie oben)

$$\frac{f^n}{e^{m+n}} = \lambda$$

gesetzt ist. Aus dieser Gleichung hat man die verschiedenen Werthe von ϱ zu bestimmen; den Werth von r, welcher jedem Werthe von ϱ entspricht, findet man sodann aus einer der Gleichungen (I), am besten aus der zweiten, rücksichtlich der absoluten Grösse, wobei jedoch in dem Falle, wo $m+n$ gerade ist, noch eine der beiden andern Gleichungen zu Entscheidung des Zeichens hinzugezogen werden muss.

19.

Die Auflösung der Gleichung II auf indirectem Wege wird man immer mit Leichtigkeit beschaffen können, wozu noch die Berücksichtigung der folgenden Bemerkungen beitragen wird.

1) Die Werthe von ϱ liegen zwischen 0 und 180°; in dem Falle, wo die Coëfficienten der vorgegebenen Gleichung reell sind, braucht man nur die halbe Anzahl, nemlich die zwischen 0 und 90° liegenden, einzeln aufzusuchen.

2) In dem einen wie in dem andern Falle wird man zuerst das betreffende Intervall in die verschiedenen Unterabtheilungen scheiden, die sich durch die Zeichenabwechslungen in den Werthen der auf der rechten Seite der Gleichung II stehenden Function von ϱ bilden. Die Übergangswerthe von ϱ können offenbar nur solche sein, wo einer der Winkel $m\varrho+\varepsilon-\varphi$, $n\varrho-\varepsilon$, $(m+n)\varrho-\varphi$ durch 180° theilbar, und also jene Function selbst entweder 0 oder unendlich wird. Von jenen Unterabtheilungen bleiben dann diejenigen,

in welchen der Werth der Function negativ wird, schon von selbst aus der weitern Untersuchung ausgeschlossen.

3) Falls man nicht schon auf andern Wegen genäherte Werthe von ϱ erlangen kann, wird man sich das indirecte Durchsuchen der geeigneten Intervalle dadurch sehr erleichtern, dass man auf ähnliche Weise, wie aus den Beispielen des 16. Artikels zu ersehen ist, die ersten Versuche nach abgekürzten Tafeln mit wenigen Zifern ausführt, und in manchen Fällen möchte man wohl bequem finden, zuerst nur die Sinuslogarithmen mit drei Zifern auf einem Blättchen etwa von Grad zu Grad verzeichnet zu diesem Zweck zu verwenden.

20.

Zu weiterer Erläuterung mag die Berechnung der imaginären Wurzeln der oben behandelten Gleichung

$$x^7 + 28x^4 - 480 = 0$$

als Beispiel dienen. Nach der Bezeichnung des Art. 17 haben wir hier zuvörderst, wie oben, $m = 4$, $n = 3$, $e = 28$, $f = 480$, und sodann weiter $\varepsilon = 0$, $\varphi = 180^0$. Die Formeln I des Art. 18 werden demnach

$$r^4 = \frac{480 \sin 7\varrho}{28 \sin 3\varrho}$$

$$r^7 = -\frac{480 \sin 4\varrho}{\sin 3\varrho}$$

$$r^3 = -\frac{28 \sin 4\varrho}{\sin 7\varrho}$$

und die Formel II

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{823543}{6750} = \frac{\sin 7\varrho^7}{\sin 3\varrho^3 \sin 4\varrho^4}$$

aus welcher Gleichung zwei zwischen 0 und 90^0 liegende Werthe von ϱ zu bestimmen sind, da die Gleichung $X = 0$ neben ihren drei bereits ermittelten reellen Wurzeln noch zwei Paare zusammengehöriger imaginärer hat. Innerhalb dieser Grenzen wird $\sin 7\varrho$ dreimahl $= 0$, nemlich für $\varrho = 25\frac{5}{7}$ Grad, $51\frac{3}{7}$ Grad und $77\frac{1}{7}$ Grad, wobei $\sin 7\varrho^7$ jedesmahl sein Zeichen ändert; $\sin 3\varrho$ wird einmahl $= 0$ für $\varrho = 60^0$ gleichfalls mit Zeichenwechsel von $\sin 3\varrho^3$; endlich $\sin 4\varrho$ wird einmahl $= 0$ für $\varrho = 45^0$, aber ohne Zeichenwechsel für

sin $4\varrho^4$. Erwägt man nun noch, dass der Werth von $\frac{\sin 7\varrho^7}{\sin 3\varrho^3 \sin 4\varrho^4}$ für $\varrho = 0$ dem Grenzwerthe $\frac{7^7}{3^3 4^4}$ gleich zu setzen ist, so wird das Verhalten der Werthe jener Function in den sechs Unterabtheilungen des Zwischenraumes von 0 bis 90° in folgender Übersicht zusammengefasst:

$\varrho = 0$ Grad	$\frac{823543}{6912}$
	+
$25\frac{5}{7}$	0
	—
45	∞
	—
$51\frac{3}{7}$	0
	+
60	∞
	—
$77\frac{1}{7}$	0
	+
90°	∞

Man erkennt hieraus, dass sowohl im vierten als im sechsten Zwischenraume nothwendig ein der Formel II Genüge leistender Werth von ϱ liegen muss, und eines Mehrern bedarf es für unsern Zweck nicht, da schon von vorne her fest steht, dass es nur zwei solche Werthe gibt. Die Gleichung II setze ich in die Form

$$7 \log \sin 7\varrho - 3 \log \sin 3\varrho - 4 \log \sin 4\varrho = S = 2{,}0863825$$

Die Auffindung des zwischen $51\frac{3}{7}$ und 60 Grad liegenden Werthes durch allmählige Annäherung vermittelst der Tafeln mit 3, 4, 5, 7 Zifern zeigt folgendes Schema:

ϱ	S	Fehler
57°	1,527	— 0,559
58	2,354	+ 0,268
57° 40′	2,0624	— 0,0240
57 50	2,2057	+ 0,1193

57° 41′	2,07658	— 0,00980
57 42	2,09074	+ 0,00436

57° 41′ 41″	2,0862962	— 0,0000863
57 41 42	2,0865320	+ 0,0001495

Hieraus $\varrho = 57^0\,41'\,41''366$, und ferner nach der zweiten Formel in 1.

$\log \sin 4\varrho = 9{,}8891425\,n$

$\text{Compl.} \log \sin 3\varrho = 0{,}9193523$

$\log (-480) = 2{,}6812412\,n$

$7 \log r = 3{,}4897360$

$\log r = 0{,}4985337$

und damit

$x = +\,1{,}6843159 + 2{,}6637914\,i$

so wie die andere dazu gehörige Wurzel

$x = +\,1{,}6843159 - 2{,}6637914\,i$

Der andere zwischen $77\frac{1}{7}$ und 90° liegende Werth von ϱ wird durch Anwendung von Tafeln mit drei Decimalen als zwischen 86° und 87° liegend erkannt. Die Rechnung in gleicher Gestalt wie im vorhergehenden Falle steht so:

ϱ	S	Fehler
86°	1,885	— 0,201
87	2,533	+ 0,447

86° 10′	1,9907	— 0,0957
86 20	2,0946	+ 0,0082

86 19	2,08409	— 0,00229
86 20	2,09447	+ 0,00809

86° 19′ 13″	2,0863229	— 0,0000596
86 19 14	2,0864970	+ 0,0001145

$\varrho = 86^0\,19'\,13''342$

$\log \sin 4\varrho = 9{,}4049540\,n$

$\text{Compl.} \log \sin 3\varrho = 0{,}0081108\,n$

$\log (-480) = 2{,}6812412\,n$

$7 \log r = 2{,}0943060\,n$

$\log r = 0{,}2991866\,n$

Zieht man vor, r positiv zu haben, so braucht man nur zugleich für ϱ den um 180° vergrösserten Werth 266° 19′ 13″ 342 anzusetzen. Die Wurzel selbst ist

$$x = -0{,}1278113 - 1{,}9874234\,i$$

und die andere dazu gehörige nur im Zeichen des imaginären Theils davon verschieden.

Die sämmtlichen Wurzeln der Gleichung $x^7 + 28x^4 - 480 = 0$ sind demnach

$+ 1{,}9228841$
$- 2{,}4580892$
$- 2{,}5778036$
$+ 1{,}6843159 + 2{,}6637914\,i$
$+ 1{,}6843159 - 2{,}6637914\,i$
$- 0{,}1278113 + 1{,}9874234\,i$
$- 0{,}1278113 - 1{,}9874234\,i$

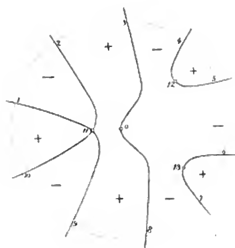
Die Summe der Wurzeln $+ 0{,}0000005$ ist so genau mit dem wahren Werthe 0 übereinstimmend, wie nur von dem Gebrauch siebenzifriger Logarithmen erwartet werden durfte. In der andern Form hat man

log r	ϱ		
0,2839531	0		
0,3905976	180°		
0,4112498	180		
0,4985337	57	41′	41″ 366
0,4985337	302	18	18, 634
0,2991866	93	40	46, 658
0,2991866	266	19	13, 342

Die Summe der Logarithmen der Werthe von r findet sich $= 2{,}6812411$, gleichfalls befriedigend genau mit dem Logarithmen von 480 übereinstimmend.

Es wird übrigens kaum nöthig sein zu erinnern, dass die in diesem so wie die im 16. Artikel aufgestellten Rechnungen nur dazu bestimmt sind, den Gang der Arbeit nach ihren Hauptmomenten zu erläutern, keinesweges aber für die Form des kleinen Mechanismus der Operationen maassgebend sein sol-

len. Geübtere Rechner werden meistens vorziehen, nicht so viele Zwischenstufen anzuwenden, als in jenen Beispielen geschehen ist. Überhaupt wird jeder in dergleichen Arbeiten einigermaassen erfahrne die Einzelnheiten des Geschäfts leicht selbst in diejenige Gestalt bringen, die den jedesmahligen Umständen und seiner eignen individuellen Gewöhnung am meisten angemessen ist, und es kann hier nicht der Ort sein, in solche Einzelnheiten weiter einzugehen.



Gauss Beiträge zur Theorie der algebraischen Gleichungen